Лекция 12 ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 1. Частные производные высших порядков

Частные производные $\dfrac{\partial f(x;y)}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f(x;y)}{\partial y}$ называют частными производными первого порядка. Их можно рассматривать как функции от $(x;\ y)\in D$. Эти функции могут иметь частные производные, которые называются *частными производными второго порядка*. Они определяются и обозначаются следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=z''_{xx}=f''_{x^2}(x;y);$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=z''_{xy}=f''_{xy}(x;y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=z''_{yx}=f''_{yx}(x;y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=z''_{yy}=f''_{y^2}(x;y)$$

Аналогично определяются частные производные 3-го, 4-го и т. д. порядков.

Так, $z'''_{xxy}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)$, $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial^3 z}{\partial z\partial y\partial x}\right)=\dfrac{\partial^4 z}{\partial x\partial y\partial x^2}$ (или $\left(z'''_{xyx}\right)'_x=z^{(4)}_{xyx^2}$)

и т. д.

Частная производная второго или более высокого порядка, взятая по различным переменным, называется смешанной частной производной.

Таковыми являются, например,

Пример 44.2. Найти частные производные второго порядка функции $z = x^4 - 2x^2y^3 + y^5 + 1$.

Решение: Так как $z'_x = 4x^3 - 4xy^3$ и $z'_y = -6x^2y^2 + 5y^4$, то

$$z''_x=\left(4x^3-4xy^3\right)'_y=-12xy^2,$$

$$z''_{yx}=\left(-6x^2y^2+5y^4\right)'_x=-12xy^2$$

Оказалось, что $z''_{xy}=z''_{xy}$.

Этот результат не случаен. Имеет место теорема, которую приведем без доказательства.

Теорема 4 (Шварц). Если частные производные высшего порядка непрерывны, то смешанные производные одного порядка, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, равны между собой.

В частности, для $z=f(x;y)$ имеем: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

§ 2. Дифференциалы высших порядков

Введем понятие дифференциала высшего порядка. Полный дифференциал функции (формула (44.5)) называют также дифференциалом первого порядка.

Пусть функция $z = f(x;y)$ имеет непрерывные частные производные второго порядка. Дифференциал второго порядка определяется по формуле $d^2z = d(dz)$. Найдем его:

$$d^2z = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\partial x + \frac{\partial z}{\partial y}\partial y\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\partial x + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)'_x \cdot dx + \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)'_y \cdot dy =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 x}{\partial y \partial x}dy\right) \cdot dx + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy\right) \cdot dy.$$

Отсюда: $d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dx \cdot dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$. Символически это записывается так:

$$d^2z = \left(\frac{\partial}{}dx + \frac{\partial}{}dy\right)^2 \cdot z$$

Аналогично можно получить формулу для дифференциала третьего порядка:

$$d^3z = d\left(d^2z\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3 \cdot z,$$

где

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3 = \frac{\partial^3}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^2}{\partial x^2}dx^2 \cdot \frac{\partial}{\partial x}dy + 3\frac{\partial}{\partial x}dx \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial^3}{\partial y^3}dy^3.$$

Методом математической индукции можно показать, что

$$d^nz = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n \cdot z, \qquad n \in \mathrm{N}$$

Отметим, что полученные формулы справедливы лишь в случае, когда переменные x и y функции $z = f(x;y)$ являются независимыми.

Пример 44.4. (Для самостоятельного решения.)

Найти d^2z, если $z = x^3y^3$.

Ответ: $d^2z = 6xy^2\, dx^2 + 12x^2y\, dx\, dy + 2x^3\, dy^2$.